

20. Calcular $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}$. $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x} = \int \frac{2 dz}{1 - \frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2 dz}{(1-z)^2}$.

Para $x = 0$, $\operatorname{arc} \operatorname{tag} z = 0$ y $z = 0$; Para $x = \pi/3$, $\operatorname{arc} \operatorname{tag} z = \pi/6$ y $z = \sqrt{3}/3$. Por tanto

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x} = 2 \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dz}{(1-z)^2} = \left. \frac{2}{1-z} \right|_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{2}{1-\sqrt{3}/3} - 2 = \sqrt{3} + 1$$

Problemas propuestos

21. Hallar la integral $\int_a^b c dx$ del Problema 1 dividiendo el intervalo $a \leq x \leq b$ en n subintervalos de longitudes $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \dots, \Delta_n x$. Obsérvese que $\sum_{k=1}^n \Delta_k x = b - a$.

22. Hallar la integral $\int_a^b x dx$ del Problema 2 empleando subintervalos de igual longitud y (a) eligiendo los puntos x_k coincidiendo con el extremo izquierdo de los subintervalos, (b) eligiendo los puntos x_k coincidiendo con los puntos medios de los subintervalos, (c) eligiendo los puntos x_k a un tercio de sus longitudes, es decir, tomando $x_1 = \frac{1}{3}\Delta x, x_2 = \frac{2}{3}\Delta x, \dots$

23. Comprobar que $\int_1^4 x^2 dx = 21$ empleando subintervalos de igual longitud y eligiendo los puntos x_k (a) en el extremo derecho de los subintervalos (b) en el extremo izquierdo de los subintervalos, (c) en el punto medio de los subintervalos.

24. Con los mismos subintervalos y puntos elegidos en el Problema 23(a), calcular las integrales $\int_1^4 x dx$ y $\int_1^4 (x^2 + x) dx$ y demostrar que $\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

25. Hallar las integrales $\int_1^2 x^2 dx$ y $\int_2^4 x^2 dx$. Comparar la suma con el resultado del Problema 23 y demostrar que

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \text{ cuando } a < c < b.$$

26. Calcular $\int_0^1 e^x dx = e - 1$.

Ind. $S_n = \sum_{k=1}^n e^{k \cdot \Delta x} \Delta x = e^{\Delta x} (e - 1) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$ es una forma indeterminada del tipo 0/0.

27. Demostrar las propiedades 4 y 5 de la integral definida.

28. Aplicar el teorema fundamental o regla de Barrow para calcular:

(a) $\int_0^2 (2+x) dx = 6$

(b) $\int_0^2 (2-x)^2 dx = 8/3$

(c) $\int_0^3 (3-2x+x^2) dx = 9$

(d) $\int_{-1}^3 (1-t^2)t dt = -9/4$

(e) $\int_1^4 (1-u)\sqrt{u} du = -116/15$

(f) $\int_1^9 \sqrt{1+3x} dx = 26$

(g) $\int_0^2 x^2(x^3+1) dx = 40/3$

(h) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2$

(i) $\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2 dx = 1/30$

(j) $\int_4^9 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-15}} = 6$

(k) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2}a^2\pi$

(l) $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2} dx = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$